

# LIFPF – Programmation fonctionnelle

## TD1 – introduction au $\lambda$ -calcul

Licence informatique UCBL – Printemps 2022–2023

### Exercice 1 : Typage et évaluation en $\lambda$ -calcul

1. Pour chacune des  $\lambda$ -expressions suivantes, donner son type en supposant que le seul type primitif est **number** puis l'évaluer *en explicitant chaque  $\beta$ -réduction*. Si l'expression n'est pas typable, expliquer pourquoi. On supposera que l'addition notée  $+$  a pour type **number**  $\rightarrow$  **number**  $\rightarrow$  **number** et se réduit par calcul arithmétique usuel, de même que pour la multiplication notée  $*$ . Par exemple,  $(\lambda x.x + 3) 2$  a pour type **number** et peut se réduire en  $(\lambda x.x + 3) 2 \xrightarrow{\beta} 2 + 3 \rightsquigarrow 5$ 
  1.  $(\lambda x.\lambda y.(x + y)) 3 4$
  2.  $(\lambda x.\lambda y.(x y)) 3 4$
  3.  $\lambda x.(x x)$
  4.  $(\lambda x.\lambda y.(y (x + 2))) 5 (\lambda z.(z * 3))$
  5.  $(\lambda x.((\lambda y.(x + y)) x)) 5$
  6.  $(\lambda x.((x (\lambda y.(y + 2))) + (x (\lambda z.(z * 3))))) ((\lambda u.\lambda w.(w u)) 5)$
  7.  $(\lambda x.\lambda y.(x y))(\lambda z.z)$
  8.  $\lambda x.(x + 3)(\lambda y.y)$
  9.  $(\lambda x.\lambda y.x)$
  10.  $(\lambda x.\lambda y.x) 3$
  11.  $(\lambda x.\lambda y.(y (3 + x))) 4 (\lambda z.(z * 2))$
  12.  $(\lambda x.((\lambda y.(y * x)) x)) 5$
2. Donner deux séquences de réductions *différentes* de l'expression  $(\lambda x.x + 5)((\lambda z.z) 2)$

### Exercice 2 : Pour aller plus loin : codage des booléens dans le $\lambda$ -calcul

Dans cet exercice on va s'intéresser au codage des booléens en  $\lambda$ -calcul pur appelé *booléens de Church*. Dans ce codage, les valeurs de vérités sont *des fonctions* et les fonctions booléennes des *fonctions d'ordre supérieur*. On définit les termes suivants qui représentent « vrai », « faux » et la fonction « et » :

- **T** =  $\lambda x.\lambda y.x$
- **F** =  $\lambda x.\lambda y.y$
- **AND** =  $\lambda x.\lambda y.((x y) \mathbf{F})$ , soit  $\lambda x.\lambda y.x y \mathbf{F}$  avec les parenthèses implicites

1. Vérifier les réductions suivantes

$$\mathbf{AND}(\mathbf{T})(\mathbf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{T}$$

$$\mathbf{AND}(\mathbf{T})(\mathbf{F}) \rightsquigarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{AND}(\mathbf{F})(\mathbf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{AND}(\mathbf{F})(\mathbf{F}) \rightsquigarrow \mathbf{F}$$

2. Quelle est la fonction booléenne associée à **XXX** =  $\lambda x. \lambda y. x \ y \ x$  ?
3. Qu'est ce qui se passe quand on évalue **AND**  $x \ y$  où  $x$  ou  $y$  n'est *pas* la représentation d'un booléen ?
4. Donner une représentation de la fonction booléenne « non ».
5. Donner une représentation de la fonction booléenne « ou ».
6. Montrer que le terme **IF** =  $\lambda x. x$  permet de représenter l'instruction conditionnelle **IF** *cond* **THEN**  $M$  **ELSE**  $N$ .